לוגיקה (1) פתרון תרגיל 8

.1

(א) $val(\mathfrak{A},\phi)=T$ כי $f^{\mathfrak{A}}(3)=3$ וגם $r^{\mathfrak{A}}(3,3)=T$.

(ב) $val(\mathfrak{A},\phi)=T$ כי $r^{\mathfrak{A}}(1,1)$ וגם $f^{\mathfrak{A}}(1)=2$ וגם $f^{\mathfrak{A}}(4)=3$ וגם $r^{\mathfrak{A}}(4,3)=T$.

(ג) $val(\mathfrak{A},\phi)=T$ כי $f^{\mathfrak{A}}(2)=3$ ו-$f^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(2))=3$ ו-$r^{\mathfrak{A}}(3,3)=T$.

(ד) $val(\mathfrak{A},\phi)=F$ כי $r^{\mathfrak{A}}(3,f^{\mathfrak{A}}(3))=T$.

.2 יש דרכים רבות להגדיר מבנה כנדרש. נסתכל למשל על המבנה בו $<$ הוא היחס המלא, כלומר $x<^{\mathfrak{A}}y=T$ לכל $x,y\in A$. אז (ב) ו-(ג) מתקיימים (עבור כל הגדרה של $*$). כדי לקבל את (א) אפשר להגדיר (למשל): $x*^{\mathfrak{A}}y=x$ לכל $x,y\in A$.

.3

(א) הטענה נכונה. יהי $\mathfrak{A}$ מבנה ל-L. ונניח $val(\mathfrak{A},\forall x\,[r(x)])=T$ אז לכל $a\in|\mathfrak{A}|$ מתקיים $r^{\mathfrak{A}}(a)=T$ בפרט $r^{\mathfrak{A}}(c^{\mathfrak{A}})=T$ ולכן $val(\mathfrak{A},r(c))=T$.

(ב) הטענה אינה נכונה. נתבונן במבנה $\mathfrak{A}$ שעולמו $|\mathfrak{A}|=\{1,2\}$ ונגדיר $r^{\mathfrak{A}}(x)=T$ אםם $x=1$, וכן ו-$s^{\mathfrak{A}}(x)=T$ אםם $x=2$. אז הפסוק בצד ימין מקבל ב-$\mathfrak{A}$ ערך אמת T ואילו הפסוק בצד שמאל מקבל ב-$\mathfrak{A}$ ערך אמת F.

(ג) הטענה אינה נכונה. נתבונן במבנה $\mathfrak{A}$ שהוגדר בסעיף הקודם, ובהשמה $s=\binom{x\ y}{1\ 2}$ אז: $val(\mathfrak{A},s,r\,(x)\wedge s\,(y))=T$ אבל $val(\mathfrak{A},s,r\,(y)\wedge s\,(x))=F$.

(ד) הטענה נכונה. ישירות מהגדרת האמת של הכמת $\exists$.

.4
$$\phi=\forall x\exists y\,\{f\,(x)\approx y\wedge\forall z\,[f\,(x)\approx z\to z\approx y]\}\wedge$$
$$\forall x\forall y\,\{f\,(x)\approx f\,(y)\to x\approx y\}\wedge$$
$$\exists x\forall y\,\{\neg f\,(y)\approx x\}.$$

.5

(א) הטווח של הכמת $\forall x$ הוא הנוסחא: $\exists y\,[r(x,y)\to r(x,f(z)]\wedge\forall z\,[r(x,f(z))]$.
הטווח של הכמת $\forall y$ הוא הנוסחא: $[r(x,y)\to r(x,f(z)]\wedge\forall z\,[r(x,f(z))]$.
הטווח של הכמת $\forall z$ הוא הנוסחא: $[r(x,f(z))]$.
ולכן קבוצת המשתנים החפשיים של ϕ היא: $\{z\}$.

(ב) טווח של הכמת $\forall x$ הוא הנוסחא: $\{r\,(x,y)\to\exists y\,[r\,(y,z)\to\forall z\,(r(z,u))]\}$.
טווח של הכמת $\exists y$ הוא הנוסחא: $[r\,(y,z)\to\forall z\,(r(z,u))]$.
טווח של הכמת $\forall z$ הוא הנוסחא: $(r(z,u))$.
ולכן קבוצת המשתנים החפשיים של ϕ היא: $\{y,z,u\}$.

(ג) הטווח של הכמת $\forall x$ הוא הנוסחא: $(r\,(x,y))$.
הטווח של הכמת $\forall z$ הוא הנוסחא: $(r\,(z,x))$.
ולכן קבוצת המשתנים החפשיים של ϕ היא: $\{y,x\}$.